Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ____________________

Carnet: ________ Sección: ________

MA2112 enero-abril 1999. Primer Examen Parcial Tipo A1.

1. (a) (6 ptos) Hallar el plano tangente a la superficie $S : z = xy$ en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

   (b) (4 ptos) Probar que las rectas $\{z = y_0 x, y = y_0\}$, $\{z = x_0 y, x = x_0\}$ pertenecen a S y al plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0).

   JUSTIFIQUE SU RESPUESTA
   Solución.

   (a) La ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $f = 0$ en un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ de dicha superficie es

   $$\nabla(P).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

   donde el '.' denota el producto escalar. Tenemos $f = xy - z$, de donde $\nabla f = (y, x, -1)$, y, aplicando la formula general, se obtiene que la ecuación del plano tangent a S en P es

   $$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0$$

   (b) Sustituyendo las ecuaciones de la recta $z = y_0 x, y = y_0$ en $xy - z$ se obtiene $xy_0 - y_0 x$, que es identicamente zero, lo que dice que la recta pertenece a S. Ahora sustiuyendo las ecuaciones de la recta en el lado izquierdo de la ecuación del plano tangente, se obtiene

   $$y_0(x - x_0) + x_0(y_0 - y_0) - (y_0 x - z_0) = y_0 x_0 - z_0$$

   Pero $z_0 = x_0 y_0$ puesto que$(x_0, y_0, z_0) \in S$. Luego, todos los puntos de la recta dada satisfacen la ecuación del plano tangente, es decir, la recta pertenece al plano. Semejante para la otra recta.

2. (10 ptos) Hallar los valores extremos de $f(x,y,z) = xz + yz$ si (x,y,z) está en la intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 2$ y $zy = 2$.
JUSTIFIQUE SU RESPUESTA
Solución. Se aplica el método de multiplicadores de Lagrange, con 2 restricciones. La teoría nos dice que los extremos son soluciones de la ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ g &= 2 \\ h &= 2 \end{aligned}$$

donde λ, μ son los multiplicadores de Lagrange y $g = x^2 + z^2$, $h = zy$. Resulta

$$\begin{aligned} (z, z, x+y) &= \lambda(2x, 0, 2z) + \mu(0, z, y) \\ g &= 0 \\ h &= 0 \end{aligned}$$

dando

$$\begin{aligned} z &= 2\lambda x && (1) \\ z &= \mu z && (2) \\ x + y &= 2\lambda z + \mu y && (3) \\ x^2 + z^2 &= 2 && (4) \\ yz &= 2 && (5) \end{aligned}$$

De (2) se tiene $\mu = 1$ o $z = 0$. Pero si $z = 0$ ecuación (5) no se cumple. Asi $\mu = 1$. Con este valor de μ, (3) da $x + y = 2\lambda z + y$, o sea $x = 2\lambda z$. Restando esta a (1), se obtiene $(z + x)(1 - 2\lambda) = 0$. Asi $z = -x$ o $\lambda = 1/2$. Si $z = -x$,sustituyendo en (4) da $2x^2 = 2$, o sea $x = \pm 1$. El valor correspondiente de y está dado por (5) y resultan puntos críticos $(1, -2, -1)$ y $(-1, 2, 1)$. En el otro caso, $\lambda = 1/2$ da $z = x$ (usando 1), y (4) da $z = x = \pm 1$. Entonces, por (5), $y = \pm 2$, y se tienen puntos críticos $(1, 2, 1)$ y $(-1, -2, -1)$. En resumen, los puntos críticos son

$$(1, -2, -1), (-1, 2, 1), (1, 2, 1), (-1, -2, -1)$$

Para clasificarlos, observar que $g = 2$ implica que $|x|, |z|$ estan acotados, y si $|z|$ está acotado entonces $|y|$ también, por $h = 2$. Se trata pues de una función continua en un conjunto acotado, y por lo tanto hay máximos y mínimos globales, a buscarse entre los puntos críticos hallados. Se evalua f en ellos. Resultan valores $1, 1, 3, 3$ respectivamente. Asi:

- $(-1, -2, -1)$ y $(1, 2, 1)$ son máximos globales de f, en los cuales f alcanza su valor máximo, que es 3.
- $(1, -2, -1)$ y $(-1, 2, 1)$ son mínimos globales de f, en los cuales f alcanza su valor mínimo, que es 1.

3. (10 ptos) Sea $w = f(x, y)$ una función C^2 de dos variables, y sea $x = u + v$, $y = u - v$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$$

JUSTIFIQUE SU RESPUESTA
Solución. Por tratarse de una función C^2, las derivadas segundas mixtas son iguales. Asi no haremos caso al orden de diferenciación.

Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Puesto que $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = 1$, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \tag{6}$$

De manera semejante

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Pero $\frac{\partial x}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -1$, asi que

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \tag{7}$$

Derivando 6 en v

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Usando 7 aplicada no a la función original f sino a las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial v} f_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} = f_{xx} - f_{yx}$$

De manera semejante

$$\frac{\partial}{\partial v} f_y = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = f_{xy} - f_{yy}$$

Sumando, y usando la igualdad de las parciales mixtas, se obtiene el resultado deseado.

4. (10 ptos)Hallar y clasificar los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - y^2 - x^2y + 3$.
JUSTIFIQUE SU RESPUESTA
Solución.

Los puntos críticos estan dados por $\nabla f = 0$, lo que en este caso es $(3x^2 - 2xy, 3y^2 - 2y - x^2) = (0,0)$. Si $3x^2 - 2xy = 0$ entonces $x(3x - 2y) = 0$, y $x = 0$ o $3x = 2y$. Suponga primero que $x = 0$. Entonces la seguna ecuación $3y^2 - 2y - x^2 = 0$ vuelve $3y^2 - 2y = 0$, con soluciones $y = 0$ o $y = 2/3$. Se tiene pues puntos críticos $(0,0)$ y $(0,2/3)$. Sea ahora $3x = 2y$, o sea, $x = 2y/3$. Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta $3y^2 - 2y - 4y^2/9 = 0$. simplificando, es $y(23y^2 - 18) = 0$, y $y = 0$ o $y = 18/23$. La primera opción da de nuevo $(0,0)$, la segunda el punto $(12/23, 18/23)$. En resumen, los puntos críticos son

$$(0,0), (0,2/3), (12/23, 18/23)$$

El Hessiano es

$$\begin{pmatrix} 6x - 2y & -2x \\ -2x & 6y - 2 \end{pmatrix}$$

El determinante en $(0,0)$ es 0 y se aplaza un momento la clasificación. El det. en $(0,2/3)$ vale $-8/3$ y por consiguiente este es una silla. En

$(12/23, 18/23)$ el det. vale $72/23$, o sea, es positivo. Ademas f_{xx} es positivo también en este punto, asi que el punto es un mínimo local. En el origen, el Hessiano es degenerado. En general, hay que ir al las 3as derivadas, pero en este caso no hace falta. Se ve que $f(x, 0) = x^3 + 3$, que no tiene ni máx. ni min. en $x = 0$. Haciendo $x = 0$ se tiene $f(0, y) = y^3 - y^2 + 3$ tiene un max local. Asi $(0, 0)$ es tipo de silla de orden superior.(Para ganar el punto que se da por esta clasificación, es suficiente decir "ni max ni min"). Queda decidir si entre estos puntos críticos hay max. o min. *global.* La respuesta es *no.* De hecho, f no tiene ni máximos ni mínimos globales: ya que los términos dominantes de f son de grado impar, haciendo x, y grandes y positivos se hace f tan grande como se quiere, y haciendo x, y grandes negativos se hace f tan grande y negativo como se quiere. En resumen

- f tiene 3 puntos críticos, pero no tiene ni máximos ni mínimos globales.
- $(0, 2/3)$ es una silla
- $(12/23, 18/23)$ es un mínimo local.
- $(0, 0)$ no es ni max ni min.